ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 146 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137
УДК 517.5

О гармоничности функции с условием типа Бохера–Кёбе

Наталья Петровна ВОЛЧКОВА[1] **, Виталий Владимирович ВОЛЧКОВ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»
283000, Российская Федерация, г. Донецк, ул. Артема, 58
[2] ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
283001, Российская Федерация, г. Донецк, ул. Университетская, 24

Аннотация. Пусть B_R — открытый шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $B_{0,R} = B_R \backslash \{0\}$ и функция f гармонична в $B_{0,R}$. Если f имеет нулевой вычет в точке $x = 0$, то поток ее градиента через любую сферу, лежащую в $B_{0,R}$, равен нулю. В данной работе изучается обратное явление для случая, когда допустимы лишь сферы одного или двух фиксированных радиусов r_1 и r_2. Найдено описание класса функций

$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R}) = \left\{ f \in C^\infty(B_{0,R}) : \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0 \quad \forall x \in B_{R-r} \backslash S_r \right\},$$

где $r \in (0, R/2)$, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$, $S_r = S_r(0)$. Доказано, что если r_1/r_2 не является отношением нулей функции Бесселя $J_{n/2}$ и $f \in (\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$, то функция f является гармонической в $B_{0,R}$ и $\mathrm{Res}\,(f, 0) = 0$. Этот результат нельзя существенно усилить. А именно, если $r_1/r_2 = \alpha/\beta$, где $J_{n/2}(\alpha) = J_{n/2}(\beta) = 0$, или $R < r_1 + r_2$, то существует негармоническая в $B_{0,R}$ функция $f \in C^\infty(B_R)$ такая, что

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1; 2\}.$$

Кроме того, условие $f \in C^\infty(B_{0,R})$ нельзя заменить, вообще говоря, требованием $f \in C^s(B_R)$ при произвольном фиксированном $s \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: гармонические функции, условие Бохера–Кёбе, сферические гармоники, множества Помпейю

Благодарности: Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 124012400352-6).

Для цитирования: *Волчкова Н.П., Волчков В.В.* О гармоничности функции с условием типа Бохера–Кёбе // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 125–137. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137

On the harmonicity of a function with a Bôcher–Koebe type condition

Natalia P. VOLCHKOVA[1], **Vitaliy V. VOLCHKOV**[2]
[1] Donetsk National Technical University
58 Artioma St., Donetsk 283000, Russian Federation
[2] Donetsk State University
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russian Federation

Abstract. Let B_R be an open ball of radius R in $\mathbb{R}^n$ with the center at zero, $B_{0,R} = B_R \backslash \{0\}$, and a function f be harmonic in $B_{0,R}$. If f has zero residue at the point $x = 0$, then the flow of its gradient through any sphere lying in $B_{0,R}$ is zero. In this paper, the reverse phenomenon is studied for the case when only spheres of one or two fixed radii r_1 and r_2 are allowed. A description of the class

$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R}) = \left\{ f \in C^\infty(B_{0,R}) : \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, d\omega = 0 \quad \forall x \in B_{R-r} \backslash S_r \right\}$$

was found, where $r \in (0, R/2)$, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$, $S_r = S_r(0)$. It is proved that if r_1/r_2 is not a ratio of the zeros of the Bessel function $J_{n/2}$ and $f \in (\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$, then the function f is harmonic in $B_{0,R}$ and $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. This result cannot be significantly improved. Namely, if $r_1/r_2 = \alpha/\beta$, where $J_{n/2}(\alpha) = J_{n/2}(\beta) = 0$, or $R < r_1 + r_2$, then there exists a function $f \in C^\infty(B_R)$ non-harmonic in $B_{0,R}$ and such that

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1; 2\}.$$

In addition, the condition $f \in C^\infty(B_{0,R})$ cannot be replaced, generally speaking, by the requirement $f \in C^s(B_R)$ for an arbitrary fixed $s \in \mathbb{N}$.

Keywords: harmonic functions, Bôcher–Koebe condition, spherical harmonics, Pompeiu sets

Acknowledgements: The research was conducted on the topic of the state task (registration number 124012400352-6).

Mathematics Subject Classification: 31B05, 33C10, 33C55.

For citation: Volchkova N.P., Volchkov V.V. On the harmonicity of a function with a Bôcher–Koebe type condition. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 125–137. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Классическая теорема Гаусса о гармонических функциях утверждает, что поток градиента гармонической функции через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность равен нулю. В начале двадцатого века начали изучать различные варианты обращения этого утверждения. Первый результат такого типа принадлежит М. Бохеру [1] и П. Кёбе [2].

Теорема A (М. Бохер, П. Кёбе). *Пусть* $\mathcal{D}$ *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $f \in C^1(\mathcal{D})$ *и для любого шара* B *такого, что* $\overline{B} \subset \mathcal{D}$, *выполнено равенство*

$$\int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0, \tag{0.1}$$

где $\mathbf{n}$ *— внешняя нормаль к* ∂B, $d\omega$ *— элемент площади. Тогда функция* f *гармонична в области* $\mathcal{D}$.

Теорема A получила дальнейшее развитие и уточнение в ряде работ. В частности, Г. К. Эвансом [3] исследовался аналог уравнения (0.1), в котором ослаблялось условие непрерывности градиента ∇f. Г. Э. Рейнор [4] допустил наличие у f конечного числа особенностей и получил, помимо гармоничности f, некоторую информацию о поведении f в окрестности особых точек. Д. Д. Герген [5] установил обобщение теоремы A, заменив (0.1) равенством

$$\int_{\partial B} \left(f\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} - h\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) d\omega = 0, \tag{0.2}$$

где h — гармоническая положительная в $\mathcal{D}$ функция. С. Сакс [6] усилил результаты М. Бохера, П. Кёбе и Д. Д. Гергена, рассматривая вместо (0.1) и (0.2) асимптотическое поведение интегралов по сферам в окрестности каждой точки $x \in \mathcal{D}$. В работе [7] Э. Ф. Беккенбах получил аналог теоремы A, заменив шары в (0.1) на кубы с ребрами, параллельными осям (в этой связи см. также [3]). Более детальная информация об этих и близких результатах содержится в обзорах [8, 9].

Ряд уточнений теоремы A может быть получен на основе исследования проблемы инъективности преобразования Помпейю [10–14].

Определение 0.1. Пусть $M(n)$ — группа евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Набор $A_1, \ldots, A_m$ $(m \geq 1)$ компактных множеств положительной лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$ называется семейством Помпейю, если не существует ненулевой локально суммируемой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такой, что

$$\int_{g(A_j)} f(x)dx = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

для любого $g \in M(n)$.

Подобным образом определяется семейство со свойством Помпейю относительно заданной области в $\mathbb{R}^n$ (см. [10, § 3], [13, часть 4]). Формула Грина

$$\int_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = \int_G \Delta f\, dx \tag{0.3}$$

влечет следующую простую связь между гармоничностью и свойством Помпейю.

Теорема B. *Предположим, что* $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ *— семейство областей в* $\mathbb{R}^n$ *с кусочно-гладкой границей и их замыкания* $\overline{\mathcal{A}}_1, \dots, \overline{\mathcal{A}}_m$ *обладают свойством Помпейю относительно области* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. *Пусть* $f \in C^2(\mathcal{D})$, *и для любого* $j \in \{1, \dots, m\}$ *и всех* $g \in M(n)$ *таких, что* $g(\overline{\mathcal{A}}_j) \subset \mathcal{D}$, *выполнено равенство*

$$\int_{\partial(g(A_j))} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0.$$

Тогда функция f *гармонична в области* $\mathcal{D}$.

Используя теорему B и известные достаточные условия для множеств Помпейю (см. [10–14]), можно получать различные уточнения теоремы A. В частности, имеет место следующая теорема о двух радиусах: если $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и равенство (0.1) справедливо для любых шаров $B \subset \mathbb{R}^n$ с радиусами r_1 и r_2, причем r_1/r_2 не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$, то функция f является гармонической на $\mathbb{R}^n$ (см. [15, 16], а также [17–20], где содержатся локальные аналоги этого утверждения для шара).

В данной работе изучается случай, когда $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < R\}$, $f \in C^\infty(\mathcal{D})$, а интегрирование в (0.1) ведется по всем сферам радиусов r_1 и r_2, лежащим в $\mathcal{D}$. При этом переход к теореме B осуществить нельзя ввиду возможной особенности у функции f в нуле. Показано, что при указанных выше условиях на радиусы и $R \geq r_1 + r_2$ можно сделать вывод о гармоничности функции f в $\mathcal{D}$ (см. теорему 1.1 ниже). Отметим, что эти требования в общем случае ослабить нельзя (см. § 2).

1. Формулировка основного результата

Пусть (x, y) — стандартное скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Положим

$$B_{a,b} = \{y \in \mathbb{R}^n : a < |y| < b\}, \quad 0 \leq a < b,$$

$$B_a(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < a\}, \quad S_a(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = a\},$$

$$B_a = B_a(0), \quad S_a = S_a(0).$$

Определим множество $E_n \subset (0, +\infty)$ равенством $E_n = \{\zeta_m/\zeta_j : m, j = 1, 2, \dots\}$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — возрастающая последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$. Отметим, что

$$\zeta_m = \pi \left(m + \frac{n-1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{m} \right), \quad m \to +\infty \tag{1.1}$$

и E_1 совпадает с множеством всех положительных рациональных чисел. Всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < r_1 < r_2$, $r_1/r_2 \notin E_n$, $R \geq r_1 + r_2$ *и* $f \in C^\infty(B_{0,R})$. *Если для любого* $j \in \{1; 2\}$ *и всех* $x \in B_{R-r_j} \backslash S_{r_j}$ *справедливо равенство*

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0,$$

то функция f *является гармонической в* $B_{0,R}$.

Отметим, что при выполнении условий теоремы 1.1 функция f имеет нулевой вычет в точке $x = 0$ (см. [21, гл. 10]). Обратно, если f гармонична в $B_{0,R}$ и $\mathrm{Res}\,(f, 0) = 0$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ имеет нулевые интегралы по всем сферам, лежащим в $B_{0,R}$. Далее, если $r_1/r_2 \in E_n$ или $R < r_1 + r_2$, то теорема 2 в [19] показывает, что существует негармоническая в $B_{0,R}$ функция $f \in C^\infty(B_R)$, такая что

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1; 2\}.$$

Кроме того, условие $f \in C^\infty(B_{0,R})$ в теореме 1.1 нельзя заменить, вообще говоря, требованием произвольной конечной гладкости функции f в B_R (см. [20, теорема 1 (5)]).

2. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ множества натуральных и неотрицательных целых чисел соответственно. Далее будем считать, что всякая функция $f \in C(B_{0,R})$, допускающая непрерывное продолжение в точку 0, доопределена в нуле по непрерывности.

Нам потребуется классическая теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца: если функция f непрерывна в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\Delta f = -\lambda^2 f \ \text{ в } \ \mathcal{D} \ \text{ при некотором } \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

то

$$\int_{B_r(x)} f(y)\, dy = \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\lambda r) f(x) \tag{2.2}$$

для любого шара $B_r(x)$, такого, что $\overline{B_r}(x) \subset \mathcal{D}$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{H}^{n,k}$ — пространство сферических гармоник степени k на S_1, рассматриваемое как подпространство $L^2(S_1)$, $d(n,k)$ — размерность $\mathcal{H}^{n,k}$, $\{Y_j^k\}_{j=1}^{d(n,k)}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,k}$ (см. [22, гл. 4]). Положим

$$Y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{\omega_{n-1}}}, \quad \text{где} \quad \omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{— площадь сферы} \quad S_1.$$

Продолжим Y_j^k до гармонического многочлена на $\mathbb{R}^n$ равенством $Y_j^k(x) = \rho^k Y_j^k(\sigma)$, где ρ, σ — полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, то $\sigma = x/\rho \in S_1$). Явный вид Y_j^k может быть выписан в терминах многочленов Гегенбауэра (см. [23, гл. 11, §§ 11.2–11.4]).

Обозначим через $T^n(\tau)$ ($\tau \in O(n)$) квазирегулярное представление ортогональной группы $O(n)$ в $L^2(S_1)$. Тогда $T^n(\tau)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T^{n,k}(\tau)$, действующих на $\mathcal{H}^{n,k}$ (см. [24, гл. 9, § 2.1]). Пусть $\{t_{l,j}^k(\tau)\}$ — матрица представления $T^{n,k}(\tau)$, т. е.

$$Y_j^k(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{l=1}^{d(n,k)} t_{l,j}^k(\tau) Y_l^k(\sigma), \quad \sigma \in S_1.$$

Всякой функции $f \in C(B_{a,b})$ соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j}(x), \quad x \in B_{a,b}, \tag{2.3}$$

где
$$f^{k,j}(x) = f_{k,j}(\rho)Y_j^k(\sigma), \quad f_{k,j}(\rho) = \int_{S_1} f(\rho\sigma)\overline{Y_j^k(\sigma)}\, d\omega(\sigma).$$
Для функций $f^{k,j,l}(x) = f_{k,j}(\rho)Y_l^k(\sigma)$ справедливо равенство
$$f^{k,j,l}(x) = d(n,k)\int_{O(n)} f(\tau^{-1}x)\overline{t_{l,j}^k(\tau)}\, d\tau, \tag{2.4}$$
где $d\tau$ — мера Хаара на группе $O(n)$ единичной массы. Если $f \in C^\infty(B_{a,b})$, то ряд в правой части (2.3) сходится к f в стандартной топологии пространства $C^\infty(B_{a,b})$.

Компоненты Фурье функции f и ее лапласиана Δf связаны соотношениями
$$(\Delta f)^{k,j} = \Delta(f^{k,j}), \quad (\Delta f)_{k,j}(\rho) = \rho^{1-n-k}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^{n+2k-1}\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-k}f_{k,j}(\rho)\big)\Big). \tag{2.5}$$
В частности,
$$\Delta(\Phi_{k,n}(\rho)Y_j^k(\sigma)) = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \tag{2.6}$$
где
$$\Phi_{k,n}(\rho) = \begin{cases} \ln\rho, & \text{если } n=2,\ k=0, \\ \rho^{2-n-k}, & \text{если } n+2k \neq 2. \end{cases}$$

Положим
$$\gamma_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \geq 1, \\ \sqrt{2\pi}, & \text{если } n=2,\ k=0, \\ (2-n)\sqrt{\omega_{n-1}}, & \text{если } n\geq 3,\ k=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $f(y) = \Phi_{k,n}(|y|)Y_j^k(y/|y|)$, $y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. *Тогда*
$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = \begin{cases} 0, & |x|>r, \\ \gamma_{k,n}, & |x|<r. \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Требуемое равенство следует из (2.6) и теоремы о вычетах для гармонических функций (см. [21, теорема 10.8]). □

Обозначим через Z_ν функцию Бесселя J_ν или функцию Неймана N_ν.

Лемма 2.2. *При* $\lambda > 0$ *имеет место равенство*
$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Big(\frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda|y|)}{|y|^{\frac{n}{2}+k-1}}Y_j^k(y)\Big)\, d\omega(y) = -(2\pi r)^{\frac{n}{2}}\lambda^{2-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(\lambda r)\,\frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda|x|)}{|x|^{\frac{n}{2}+k-1}}Y_j^k(x), \tag{2.9}$$
где $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $|x|>r$ *для* $J_{\frac{n}{2}+k-1}$ *и* $N_{\frac{n}{2}+k-1}$ *соответственно.*

Доказательство. Соотношения (2.5) и формулы дифференцирования
$$\frac{d}{dt}\big(t^\nu Z_\nu(t)\big) = t^\nu Z_{\nu-1}(t), \quad \frac{d}{dt}\big(t^{-\nu}Z_\nu(t)\big) = -t^{-\nu}Z_{\nu+1}(t) \tag{2.10}$$
влекут равенство
$$\Delta\left(\frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda\rho)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}}Y_j^k(\sigma)\right) = -\lambda^2\,\frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda\rho)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}}Y_j^k(\sigma), \quad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}. \tag{2.11}$$

При этом
$$\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda\rho)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}}Y_j^k(\sigma)=\frac{\lambda^{\frac{n}{2}-1}}{i^k(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{S_1}e^{i\lambda(\rho\sigma,\eta)}Y_j^k(\eta)\,d\omega(\eta)$$
(см., например, [13, часть 1, формула (5.29)]). Поэтому в случае функции Бесселя соотношение (2.11) справедливо всюду на $\mathbb{R}^n$. Из (0.3), (2.11) и (2.2) получаем требуемое. □

Для $R>0$, $r\in(0,R)$ положим
$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R})=\left\{f\in C^\infty(B_{0,R}):\int_{S_r(x)}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\,d\omega=0\quad\forall x\in B_{R-r}\backslash S_r\right\}.$$

Лемма 2.3. *Класс $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ инвариантен относительно дифференцирований, ортогональных преобразований и операторов $f\to f^{k,j,l}$ $(k\in\mathbb{Z}_+,\ j,l\in\{1,\dots,d(n,k)\})$.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. По определению класса $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ имеем
$$0=\int_{S_r(x)}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\,d\omega=\frac{1}{r}\int_{S_r(x)}(\nabla f(\eta),\eta-x)d\omega(\eta)$$
$$=-\frac{1}{r}\int_{S_r}(\nabla f(x-\eta),\eta)d\omega(\eta),\quad x\in B_{R-r}\backslash S_r. \tag{2.12}$$

Дифференцируя это равенство по x, приходим к инвариантности класса $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ относительно дифференцирований. Далее, нетрудно видеть, что
$$\nabla(f\circ\tau)=\tau^{-1}\circ\nabla f\circ\tau\quad\text{для любого}\quad\tau\in O(n). \tag{2.13}$$

Используя (2.12), (2.13) и учитывая, что ортогональные преобразования сохраняют скалярное произведение, получаем
$$\int_{S_r(x)}\big(\nabla(f\circ\tau)(\eta),\eta-x\big)\,d\omega(\eta)=\int_{S_r(\tau x)}\big(\nabla f(\eta),\eta-\tau x\big)\,d\omega(\eta)=0.$$

Тогда (см. (2.4))
$$\int_{S_r(x)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(f^{k,j,l})\,d\omega=\frac{d(n,k)}{r}\int_{O(n)}\int_{S_r(\tau^{-1}x)}\big(\nabla f(\eta),\eta-\tau^{-1}x\big)\,d\omega(\eta)\,\overline{t_{l,j}^k(\tau)}\,d\tau=0.$$

Таким образом, $f\circ\tau$ и $f^{k,j,l}$ принадлежат классу $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$, что завершает доказательство леммы 2.3. □

Лемма 2.4. *Пусть $Y\in\mathcal{H}^{n,k}\backslash\{0\}$ и $h(\rho)Y(\sigma)\in\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Тогда*
$$\rho^k\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-k}h(\rho)\big)Y_j^{k+1}(\sigma)\in\mathfrak{H}_r(B_{0,R})\quad\textit{при всех}\quad j\in\{1,\dots,d(n,k+1)\}.$$

Кроме того, если $k\geq 1$, то
$$\rho^{2-n-k}\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{n+k-2}h(\rho)\big)Y_j^{k-1}(\sigma)\in\mathfrak{H}_r(B_{0,R})\quad\textit{при всех}\quad j\in\{1,\dots,d(n,k-1)\}.$$

Доказательство. Используя лемму 2.3 и повторяя рассуждение из [20, лемма 2], получаем требуемое утверждение. □

Лемма 2.5. *Пусть* $Y \in \mathcal{H}^{n,k} \setminus \{0\}$, $f(x) = \rho^{4-n-k} Y(\sigma)$. *Если* $R > 2r$ *и* $n + 2k \neq 4$, *то* $f \notin \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (2.5), находим

$$(\Delta f)(x) = 2(4 - n - 2k)\rho^{2-n-k} Y(\sigma), \quad \Delta\left(\rho^{2-n-k} Y(\sigma)\right) = 0.$$

Из этих равенств, формулы (0.3) и теоремы о среднем для гармонических функций имеем

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 4(4 - n - 2k) \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} |x|^{2-n-2k} Y(x), \quad x \in B_{r,R-r}.$$

Отсюда видно, что $f \notin \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. □

Лемма 2.6. *Пусть* $\lambda > 0$, $x \in B_r$ *и* $f(y) = f_0(|y|) = |y|^{1-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}-1}(\lambda |y|)$. *Тогда*

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = -(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \lambda^{2-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda r) |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda |x|). \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $F(x)$ интеграл в левой части равенства (2.14). Используя (2.10), имеем

$$F(0) = \int_{S_r} f_0'(|y|)\, d\omega(y) = -\lambda \int_{S_r} |y|^{1-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda |y|)\, d\omega(y) = -\frac{2\lambda(\pi r)^{\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda r)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{2.15}$$

Далее, из (2.12) и (2.13) следует, что F — радиальная гладкая функция в B_r, удовлетворяющая уравнению (2.1). Поэтому

$$F(x) = c\, |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda |x|), \quad x \in B_r,$$

для некоторой константы c (см. (2.11)). Учитывая (2.15) и равенство

$$\lim_{t \to 0} t^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

получаем $c = -(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \lambda^{2-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda r)$. Таким образом, $F(x)$ совпадает с правой частью в (2.14). □

Для доказательства следующей леммы напомним известные асимптотики бесселевых функций:

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad t \to +\infty, \tag{2.16}$$

$$N_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\sin\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad t \to +\infty \tag{2.17}$$

(см. [23, гл. 7, § 7.13]).

Лемма 2.7. *Пусть* $0 \le a < b$, $0 < r < (b-a)/2$, $f \in C^\infty(B_{a,b})$. *Тогда*

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0 \quad \text{на} \quad B_{a+r,b-r} \tag{2.18}$$

в том и только том случае, когда при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $j \in \{1, \dots, d(n,k)\}$ *имеет место равенство*

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j}\rho^k + b_{k,j}\Phi_{k,n}(\rho) + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big) + d_{m,k,j} N_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big), \quad a < \rho < b, \tag{2.19}$$

где $a_{k,j}, b_{k,j}, c_{m,k,j}, d_{m,k,j} \in \mathbb{C}$ *и* $|c_{m,k,j}| + |d_{m,k,j}| = O\big(\zeta_m^{-s}\big)$ *при* $m \to \infty$ *для любого* $s > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что функция f удовлетворяет условию (2.18). Тогда в силу (0.3) ее лапласиан Δf имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в $B_{a,b}$. Поэтому при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n,k)\}$

$$(\Delta f)_{k,j}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big) + \beta_{m,k,j} N_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big), \quad a < \rho < b,$$

где $\alpha_{m,k,j}, \beta_{m,k,j} \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_{m,k,j}| + |\beta_{m,k,j}| = O\big(\zeta_m^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$ (см. [25, теорема 3]). Используя это представление, равенство (2.5), первую формулу в (2.10) и (1.1), (2.16), (2.17), приходим к разложению

$$\rho^{n+2k-1} \frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-k} f_{k,j}(\rho)\big) = \gamma_{k,j} + r\rho^{\frac{n}{2}+k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m,k,j}}{\zeta_m} J_{\frac{n}{2}+k}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big) + \frac{\beta_{m,k,j}}{\zeta_m} N_{\frac{n}{2}+k}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big), \quad a < \rho < b,$$

где $\gamma_{k,j} \in \mathbb{C}$. Отсюда и из второй формулы в (2.10) аналогично находим

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j}\rho^k + b_{k,j}\Phi_{k,n}(\rho) - \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\frac{r}{\zeta_m}\Big)^2 \bigg(\alpha_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big) + \beta_{m,k,j} N_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big)\bigg).$$

Тем самым разложение (2.19) доказано.

Обратно, если компоненты $f_{k,j}$ функции f имеют вид (2.19), то из (0.3), (1.1), (2.16), (2.17), (2.9) и (2.8) заключаем, что при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n,k)\}$

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\big(f^{k,j}\big)\, d\omega = 0, \quad x \in B_{a+r,b-r}.$$

Следовательно, функция f удовлетворяет условию (2.18). □

Лемма 2.8. *Пусть* $R > 2r$ *и* $f(x) = f_0(\rho) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. *Тогда*

$$f_0(\rho) = a_0 + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{n}{2}-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R, \tag{2.20}$$

где $a_0, a_m \in \mathbb{C}$ *и* $a_m = O\big(\zeta_m^{-s}\big)$ *при* $m \to \infty$ *для любого* $s > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.7 имеем

$$f_0(\rho) = a_0 + b_0\Phi_{0,n}(\rho) + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{n}{2}-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big) + b_m N_{\frac{n}{2}-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_0, b_0, a_m, b_m \in \mathbb{C}$ и $|a_m| + |b_m| = O\big(\zeta_m^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$. Используем теперь условие

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\omega = 0, \quad x \in B_r.$$

Учитывая (1.1), (2.16), (2.17), (2.9), (2.8) и (2.14), находим

$$(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \zeta_m^{2-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\zeta_m) t^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\zeta_m t) = b_0 \sqrt{\omega_{n-1}}\, \gamma_{0,n}\, r, \quad 0 < t < 1. \tag{2.21}$$

Дифференцируя этот ряд по t (см. (1.1), (2.10), (2.16), (2.17)), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \zeta_m^{3-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\zeta_m) J_{\frac{n}{2}}(\zeta_m t) = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда и из известных соотношений ортогональности

$$\int_0^1 t J_{\frac{n}{2}}(\zeta_m t) J_{\frac{n}{2}}(\zeta_j t)\, dt = \begin{cases} 0, & m \neq j, \\ J^2_{\frac{n}{2}+1}(\zeta_m)/2, & m = j, \end{cases}$$

следуют равенства

$$b_m \zeta_m^{3-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\zeta_m) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Комбинируя их с формулой Ломмеля–Ганкеля

$$J_\nu(t) N_{\nu+1}(t) - J_{\nu+1}(t) N_\nu(t) = -\frac{2}{\pi t},$$

делаем вывод, что $b_m = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда $b_0 = 0$ (см. (2.21) и (2.7)). Тем самым разложение (2.20) доказано. □

Теорема 2.1. *Пусть $R > 2r$, $f \in C^\infty(B_{0,R})$. Тогда $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ в том и только том случае, когда при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n,k)\}$ имеет место равенство*

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j}\rho^k + b_{k,j}\rho^{2-n-k} + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R, \tag{2.22}$$

где $a_{k,j}, b_{k,j}, c_{m,k,j} \in \mathbb{C}$, $b_{0,1} = 0$ и $c_{m,k,j} = O\big(\zeta_m^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$.

Доказательство. Если $f \in C^\infty(B_{0,R})$ и выполнено разложение (2.22), то все $f^{k,j}$ принадлежат классу $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ (см. (1.1), (2.10), (2.16), (2.9), (2.8)). Поэтому $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$.

Далее, докажем индукцией, что если некоторая функция $h(\rho)Y_1^k(\sigma)$ принадлежит классу $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$, то h можно представить рядом вида (2.22) при $j = 1$. В случае $k = 0$ это утверждение следует из леммы 2.8. Предположим, что оно справедливо при некотором k и установим его для $k+1$. Пусть $h(\rho)Y_1^{k+1}(\sigma) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Тогда, в силу леммы 2.4,

$$\rho^{1-n-k}\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{n+k-1}h(\rho)\big) = a_{k,1}\rho^k + b_{k,1}\rho^{2-n-k} + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,1} J_{\frac{n}{2}+k-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big).$$

Отсюда находим (см. (2.10))

$$h(\rho) = \frac{a_{k,1}}{n+2k}\rho^{k+1} + \frac{b_{k,1}}{2}\rho^{3-n-k} + d_k\rho^{1-n-k} + r\rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{m,k,1}}{\zeta_m} J_{\frac{n}{2}+k}\Big(\frac{\zeta_m}{r}\rho\Big),$$

где $d_k \in \mathbb{C}$. Это представление, соотношения (2.9), (2.8) и лемма 2.5 влекут равенство $b_{k,1} = 0$, что и требовалось. Теперь из леммы 2.3 получаем (2.22) для $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Таким образом, теорема 2.1 доказана. □

3. Доказательство теоремы 1.1

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.1. По лемме 2.3 функция $f^{0,1}$ принадлежит классу $(\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$. Так как $R > 2r_1$, на основании леммы 2.8 имеем

$$f_{0,1}(\rho) = a_0 + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{n}{2}-1}\Big(\frac{\zeta_m}{r_1}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_0, a_m \in \mathbb{C}$ и $a_m = O\big(\zeta_m^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$. Учитывая, что $R \geq r_1 + r_2$ и $f^{0,1} \in \mathfrak{H}_{r_2}(B_{0,R})$, с использованием (2.9) находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_m^{2-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{r_2\zeta_m}{r_1}\right) t^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}\left(\zeta_m t\right) = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда (см. доказательство леммы 2.8)

$$a_m \zeta_m^{3-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{r_2\zeta_m}{r_1}\right) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из этих равенств и условия $r_1/r_2 \notin E_n$ видно, что $a_m = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и, значит, $f_{0,1}(\rho) = a_0$. Теперь, повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 2.1, получаем

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j}\rho^k + b_{k,j}\rho^{2-n-k}, \quad 0 < \rho < R$$

при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, d(n,k)\}$, где $a_{k,j}$, $b_{k,j} \in \mathbb{C}$ и $b_{0,1} = 0$. Поэтому функция f гармонична в $B_{0,R}$, что и требовалось.

References

[1] M. Bôcher, "On harmonic functions in two dimensions", *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.*, **41** (1906), 557–583.

[2] P. Koebe, "Herleitung der partiellen differentialgleichungen der potentialfunktion aus deren integraleigenschaft", *Sitzungsber. Berlin. Math. Gessellschaft*, **5** (1906), 39–42.

[3] G. C. Evans, "Problems of potential theory", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **7** (1921), 89–98.

[4] G. E. Raynor, "On the integro-differential equation of the Bôcher type in three space", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **32** (1926), 654–658.

[5] J. J. Gergen, "Note on a theorem of Bôcher and Koebe", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 591–596.

[6] S. Saks, "Note on defining properties of harmonic functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 380–382.

[7] E. F. Beckenbach, "Concerning the definition of harmonic functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 240–245.

[8] N. Kuznetsov, "Mean value properties of harmonic functions and related topics (a Survey)", *J. Math. Sci.*, **242** (2019), 177–199.

[9] I. Netuka, J. Veselý, "Mean value property and harmonic functions", *Classical and Modern Potential Theory and Applications. NATO ASI Series*, **430** (1994), 359–398.

[10] К. А. Беренстейн, Д. Струппа, "Комплексный анализ и уравнения в свертках", *Комплексный анализ – многие переменные – 5*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **54**, 1989, 5–111; англ. пер.:C. A. Berenstein, D. C. Struppa, "Complex analysis and convolution equations", *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* V. 54: *Several complex variables* V. *Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, ed. G. M. Khenkin, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, 1–108.

[11] L. Zalcman, "A bibliographic survey of the Pompeiu problem", *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, Nato Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, **365**, eds. B. Fuglede, M. Goldstein, W. Haussmann, W. K. Hayman, L. Rogge, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992, 185–194.

[12] L. Zalcman, "Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem", *Contemporary Mathematics*. V. 278: *Radon Transform and Tomography*, eds. E. T. Quinto, L. Ehrenpreis, A. Faridani, F. Gonzalez, E. Grinberg, AMS, 2001, 69–74.

[13] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[14] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[15] L. Zalcman, "Analyticity and the Pompeiu problem", *Arch. Rat. Anal. Mech.*, **47** (1972), 237–254.

[16] L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor, "Spectral synthesis and the Pompeiu problem", *Ann. Inst. Fourier*, **23** (1973), 125–154.

[17] J. D. Smith, "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72** (1972), 403–416.

[18] C. A. Berenstein, R. Gay, "A local version of the two-circles theorem", *Israel J. Math.*, **55** (1986), 267–288.

[19] В. В. Волчков, "Теоремы о двух радиусах на ограниченных областях евклидовых пространств", *Дифф. уравн.*, **30**:10 (1994), 1719–1724; англ. пер.:V. V. Volchkov, "Theorems on two radii on bounded domains of Euclidean spaces", *Differ. Equ.*, **30**:10 (1994), 1587–1592.

[20] В. В. Волчков, "Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах", *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34; англ. пер.:V. V. Volchkov, "A definitive version of the local two-radii theorem", *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 783–802.

[21] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer, New York, 1992.

[22] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; англ. пер.:E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton–New Jersey, 1971.

[23] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, **II**, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, **II**, McGraw-Hill, New York, 1953.

[24] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1991; англ. пер.:N. Ja. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations*, AMS, RI, 1968.

[25] В. В. Волчков, "Решение проблемы носителя для некоторых классов функций", *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30; англ. пер.:V. V. Volchkov, "Solution of the support problem for several function classes", *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1279–1294.

Информация об авторах

Волчкова Наталья Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Российская Федерация. E-mail: volna936@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий государственный университет, г. Донецк, Российская Федерация. E-mail: vit.v.volchkov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Information about the authors

Natalia P. Volchkova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Donetsk National Technical University, Donetsk, Russian Federation. E-mail: volna936@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Vitaliy V. Volchkov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department, Donetsk State University, Donetsk, Russian Federation. E-mail: vit.v.volchkov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Волчкова Наталья Петровна
E-mail: volna936@gmail.com

Corresponding author:
Natalia P. Volchkova
E-mail: volna936@gmail.com

Поступила в редакцию 16.01.2024 г.
Поступила после рецензирования 27.05.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Received 16.01.2024
Reviewed 27.05.2024
Accepted for press 07.06.2024